Septiembre-Diciembre 2018

MA2115 - Matemáticas IV

Solución Parcial 3 (35 %)

Turno 6-7

Pregunta 1

(6 ptos. c/u) Resuelva

a) $y^{(4)} - 5y''' + 8y'' - 6y' = -2 - 36x^2 + 260\,\mathrm{sen}(2x)$

b) $2x^2y'' - 3xy' + 2y = \sqrt{x}$, con $x > 0$.

Solución

a) Dado que es una ecuación diferencial no homogénea de orden 4, sabemos que la solución tendrá la forma

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

donde $y_c(x)$ es la función complementaria, y $y_p(x)$ es una solución particular de la ED.

Para hallar $y_c(x)$, consideramos la ecuación homogénea asociada a la ED dada:

$$y^{(4)} - 5y''' + 8y'' - 6y' = 0$$

Cuya ecuación auxiliar es $m^4 - 5m^3 + 8m^2 - 6m = 0$, y se factoriza como $m(m-3)\big((m-1)^2 + 1\big) = 0$. Luego, las raíces son $m_1 = 0$, $m_2 = 3$, $m_3 = 1 + i$, $m_4 = 1 - i$.

Así, las 4 soluciones L.I. son: $y_1 = 1$, $y_2 = e^{3x}$, $y_3 = e^x \cos x$, y $y_4 = e^x \,\mathrm{sen}\, x$.

La solución general para la ecuación homogénea asociada, o la función complementaria, es

$$\boxed{y_c(x) = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^x \cos x + c_4e^x \,\mathrm{sen}\, x}$$

Para la solución particular $y_p(x)$ podemos aplicar el método de coeficientes indeterminados, o el del anulador. Utilizaremos el de coeficientes indeterminados en este caso. Consideramos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = y_{p_1} + y_{p_2}$$

donde y_{p_1} representa una solución particular de $y^{(4)} - 5y''' + 8y'' - 6y' = -2 - 36x^2$. Como se trata de un polinomio de grado 2, se propone inicialmente una solución de la forma $y_{p_1} = A + Bx + Cx^2$. Sin embargo, como cero es raíz de multiplicidad 1 en la ecuación auxiliar de la EDH, es necesario que esta solución se multiplique por x. Así, la solución particular queda de la forma $y_{p_1} = Ax + Bx^2 + Cx^3$. Sustituyendo en la ED nos queda

$$\begin{aligned}
(0) - 5(6C) + 8(2B + 6Cx) - 6(A + 2Bx + 3Cx^2) &= -2 - 36x^2 \\
(-30C + 16B - 6A) + (48C - 12B)x - 18Cx^2 &= -2 - 36x^2
\end{aligned}$$

Lo cual conduce al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -30C + 16B - 6A = -2 \\ 48C - 12B = 0 \\ -18C = -36 \end{array} \right. \quad \rightarrowtail \quad \begin{array}{l} A = 35/3 \\ B = 8 \\ C = 2 \end{array}$$

Así tenemos que

$$\boxed{y_{p_1} = \frac{35}{3}x + 8x^2 + 2x^3}$$

Ahora, y_{p_2} representa una solución particular de $y^{(4)} - 5y''' + 8y'' - 6y' = 260\,\mathrm{sen}(2x)$. Como tenemos una función trigonométrica, proponemos inicialmente una solución de la forma $y_{p_2} = A\cos(2x) + B\,\mathrm{sen}(2x)$. Dado que $\pm 2i$ **no** es raíz de la ecuación auxiliar de la EDH, la propuesta se mantiene. Sustituyendo en la ED, tenemos que

$$\begin{aligned}
(16A\cos(2x) + 16B\,\mathrm{sen}(2x) - 5\big(+ 8A\,\mathrm{sen}(2x) - 8B(\cos(2x)\big) & \\
+8\big(- 4A\cos(2x) - 4B\,\mathrm{sen}(2x)\big) - 6\big(- 2A\,\mathrm{sen}(2x) + 2B\cos(2x)\big) &= 260\,\mathrm{sen}(2x) \\
(16A + 40B - 32A - 12B)\cos(2x) + (16B - 40A - 32B + 12A)\,\mathrm{sen}(2x) &= 260\,\mathrm{sen}(2x)
\end{aligned}$$

Lo cual conduce al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} -16A + 28B = 0 \\ -28A - 16B = 260 \end{array} \right. \quad \rightarrowtail \quad \begin{array}{l} A = -7 \\ B = -4 \end{array}$$

Así, tenemos que $\boxed{y_{p_2} = -7\cos(2x) - 4\,\mathrm{sen}(2x)}$. Luego,

$$\boxed{y_p(x) = \frac{35}{3}x + 8x^2 + 2x^3 - 7\cos(2x) - 4\,\mathrm{sen}(2x)}$$

Finalmente, la solución general de la ED viene dada por

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2e^{3x} + c_3e^x\cos x + c_4e^x\,\mathrm{sen}\,x + \frac{35}{3}x + 8x^2 + 2x^3 - 7\cos(2x) - 4\,\mathrm{sen}(2x)}$$

con c_i, $i = 1, 2, 3, 4$, constantes arbitrarias.

b) Reconocemos la ecuación como una ecuación de Cauchy-Euler no homogénea. Así que buscaremos una solución general de la forma $y_c(x) + y_p(x)$, la suma de la función complementaria más una solución particular de la misma.

Para hallar $y_c(x)$ proponemos el cambio $y = x^m$ en la ecuación homogénea asociada, que nos da la ecuación auxiliar

$$2m^2 - 5m + 2 = (2m-1)(m-2) = 0$$

Luego, tenemos la dos soluciones L.I. $y_1 = x^{1/2}$ y $y_2 = x^2$; y así la función complementaria viene dada por una combinación lineal de estas

$$\boxed{y_c(x) = c_1 x^{1/2} + c_2 x^2}$$

Para la solución particular utilizamos el método de variación de parámetros (MVP), primero debemos escribir la ED en su forma estándar

$$y'' - \frac{3}{2x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{\sqrt{x}}{2x^2}$$

Ahora consideramos una solución particular de la forma

$$y_p(x) = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

donde y_1, y_2 son el conjunto fundamental de soluciones de $y_c(x)$, y u_1, u_2 son funciones que satisfacen

$$u_1' = \frac{-y_2 f(x)}{W} \qquad u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W}$$

donde $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2}$ y W es el wronskiano de y_1, y_2.

Calculamos el wronskiano

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} x^{1/2} & x^2 \\ \frac{1}{2}x^{-1/2} & 2x \end{vmatrix} = 2x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} = \frac{3}{2}x^{3/2}$$

Sustituyendo en las fórmulas, tenemos que

$$u_1' = \frac{-\cancel{x^2}\sqrt{x}}{\cancel{2}\cancel{x^2}\frac{3}{\cancel{2}}x^{3/2}} = -\frac{1}{3x}$$

De donde deducimos que

$$u_1 = -\frac{1}{3}\ln x$$

Por otro lado,

$$u_2' = \frac{x^{1/2}\sqrt{x}}{2x^2\,\dfrac{3}{2}x^{3/2}} = \frac{1}{3}x^{-5/2}$$

De donde deducimos que

$$u_2 = -\frac{2}{9}x^{-3/2}$$

Sustituyendo en $y_p(x)$ tenemos que

$$\boxed{y_p(x) = -\frac{\sqrt{x}}{3}\ln x - \frac{2}{9}\sqrt{x}}$$

Finalmente, la solución general para $2x^2y'' - 3xy' + 2y = \sqrt{x}$, con $x > 0$, viene dada por

$$\boxed{y(x) = c_1x^{1/2} + c_2x^2 - \frac{\sqrt{x}}{3}\ln x - \frac{2}{9}\sqrt{x}}$$

Pregunta 2

(8 ptos.) Resuelva

$$\bar{X}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \bar{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

Solución

Buscamos una solución de la forma $X_c(t) + X_p(t)$, donde el primer sumando es la función complementaria, y el segundo es una solución particular del sistema.

Para hallar $X_c(t)$, consideramos el sistema homogéneo asociado $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X$. Para resolverlo resolvemos el problema de los valores cracterísticos. Empezamos por hallar las raíces del polinomio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Obtenemos los autovalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Sustituimos y hallamos el núcleo de $(A - \lambda_i I)$.

Para $\lambda_1 = 1$, tenemos que $(A - \lambda_1 I)K = \vec{0}$, nos lleva al sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrowtail \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde se deduce que $k_1 = k_2$. Así, $K = (k_1, k_2) = (k_1, k_1) = k_1(1, 1)$. Entonces,

$$\mathrm{E}_{\lambda_1} = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

De aquí que obtengamos la primera solución $\boxed{X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t}$

Para $\lambda_2 = -1$, tenemos que $(A - \lambda_2 I)K = \vec{0}$, nos lleva al sistema aumentado

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrowtail \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

De donde se deduce que $3k_1 = k_2$. Así, $K = (k_1, k_2) = (k_1, 3k_1) = k_1(1, 3)$. Entonces,

$$\mathrm{E}_{\lambda_2} = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

De aquí que tengamos la segunda solución $\boxed{X_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}}$

Chequeamos que sean L.I. con el wronskiano:

$$W(X_1, X_2) = \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

Ahora, como son L.I. forman un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo asociado. Luego, la solución general, y la función complementaria viene dada por una combinación lineal de ellas. Esto es,

$$\boxed{X_c(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}}$$

donde C_1, C_2 son constantes reales arbitrarias.

Para la solución particular $X_p(t)$, utilizamos el método de variación de parámetros (MVP) para sistemas de ecuaciones diferenciales. Esto es, aplicamos la fórmula

$$X_p(t) = \Phi \int \Phi^{-1} F \mathrm{d}t$$

donde Φ es la matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado, y $F = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$. Ahora, dado que la matriz fundamental viene dada por

$$\Phi = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

Identificamos fácilmente al determinante como el wronskiano, y su inversa viene dada por

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix}$$

Luego,

$$\Phi^{-1} F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

Así,

$$\int \Phi^{-1} F \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{1}{2} e^{2t} \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\boxed{X_p(t)} = \Phi \int \Phi^{-1} F \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 3e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ -\frac{1}{2} e^{2t} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2te^t - \frac{1}{2} e^t \\ 2te^t - \frac{3}{2} e^t \end{pmatrix}}$$

Finalmente, la solución general al sistema no homogéneo viene dado por

$$\boxed{\vec{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix} e^t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t}$$

Pregunta 3

(7 ptos.) Un estudiante sujeta una masa de 1 Kg a un resorte cuya constante elástica es 16 N/m. Además, le adhiere un chicle a su base que imparte una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a 10 veces la velocidad instantánea. Si la masa se libera inicialmente a un metro a la derecha del punto de equilibrio y con una velocidad $V_0 = -12\text{m/s}$:

a) Plantee el P.V.I. que modele la situación.

b) Determine la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte-amortiguador.

c) Halle el tiempo para el cual la masa alcanza el desplazamiento extremo respecto al punto de equilibrio.

Solución

Identificamos: t, el tiempo medido en segundos. $x(t)$ la posición de la masa a tiempo t, en metros. m, la masa en kilogramos. c la constante del amortiguador, k la constante elástica del resorte, $F(t)$ la fuerza externa del sistema.

Los datos que nos proporciona el enunciado son:

$$\begin{array}{ccc} m = 1 & c = 10 & k = 16 \\ x(0) = 1 & V_0 = x'(0) = -12 & F(t) = 0 \end{array}$$

a) Es conocido que la ecuación que gobierna el movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento viene dado por la fórmula

$$mx'' + cx' + kx = F(t)$$

De aquí que el P.V.I. que modela el problema venga dado por

$$\boxed{\begin{cases} x'' + 10x' + 16x = 0 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = -12 \end{cases}}$$

b) Resolvemos la EDLH con coeficientes constantes de orden 2 de la parte **a)**. La ecuación auxiliar viene dada por $m^2 + 10m + 16 = (m+2)(m+8) = 0$. De donde se deduce fácilmente que la solución general viene dada por

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-8t}$$

Sustituyendo las condiciones $x(0) = 1$ y $x'(0) = -12$, obtenemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = & 1 \\ -2c_1 - 8c_2 & = & -12 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos que los valores de las constantes son $c_1 = -\dfrac{2}{3}$ y $c_2 = \dfrac{5}{3}$. Así, la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte-amortiguador viene dada por

$$\boxed{x(t) = \frac{5}{3}e^{-8t} - \frac{2}{3}e^{-2t}}$$

c) El desplazamiento extremo se obtiene buscando el t para el cual $x'(t) = 0$. De la parte **b)** con la ecuación de movimiento, tenemos que

$$x'(t) = \frac{-40}{3}e^{-8t} + \frac{4}{3}e^{-2t} = 0$$

La cual se puede simplificar como

$$-10e^{-8t} + e^{-2t} = 0$$

O

$$e^{6t} = 10$$

De aquí obtenemos fácilmente que el tiempo requerido para el desplazamiento extremo es

$$\boxed{t = \frac{\ln(10)}{6}}$$

Pregunta 4

(2 ptos. c/u) Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Sea

$$L = a_n(x)D^n + \cdots + a_1(x)D + a_0(x)$$

un operador diferencial de orden n. Si y_1, y_2 y y_3 son soluciones de la ecuación diferencial homogénea $L(y) = 0$ en un intervalo I, entonces $y_4 = 2y_1 - y_2 + 8y_3$ es también solución de la misma ecuación en el intervalo.

b) Si 0, -1 y $1 - i$ son raíces de la ecuación auxiliar de una ecuación homogénea de orden superior con coeficientes constantes, entonces una ecuación diferencial que esté representada por dicha ecuación auxiliar puede ser $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y''' - 2y'' = 0$.

c) La matriz

$$\Phi(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 & t + \frac{1}{4} \\ 1 & t \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental para el sistema lineal homogéneo

$$\bar{X}' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\bar{X}$$

d) Considere el P.V.I.

$$x'' + 8x' + 7x = e^{-2t}\operatorname{sen}(5t), \quad x(0) = -2,\ x'(0) = 0$$

Entonces se puede interpretar como un movimiento forzado de un sistema masa-resorte-amortiguador, donde la masa se libera desde el reposo desplazada 2 unidades respecto al punto de equilibrio con el resorte estirado.

Solución

a) Verdadero. Es consecuencia del principio de superposición para soluciones de una EDL homogénea. Considerando las hipótesis y que el operador diferencial es lineal, tendríamos entonces que

$$L(y_4) = L(2y_1 - y_2 + 8y_3) = 2\cancel{L(y_1)} - \cancel{L(y_2)} + 8\cancel{L(y_3)} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Por tanto, también es solución de la EDH $L(y) = 0$.

b) Falso. Considerando la ecuación auxiliar de la ED dada, $m^5 - 3m^4 + 4m^3 - 2m^2 = m^2(m-1)\big((m-1)^2 + 1\big) = 0$, vemos que $m = -1$ no es raíz de la ecuación auxiliar. Por tanto, es falsa la afirmación.

c) Verdadero. Considerando las columnas de Φ,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \qquad X_2(t) = \begin{pmatrix} (t + \frac{1}{4})e^{2t} \\ te^{2t} \end{pmatrix}$$

Se verifica fácilmente que satisfacen

$$X_i' = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X_i \quad \text{para } i = 1, 2$$

Además, también se verifica que el wronskiano evaluado en $t = 0$, $W(0) = -\frac{1}{4} \neq 0$. Por lo que ambas soluciones son L.I., formando un conjunto fundamental de soluciones. Por tanto, Φ sería, en efecto, una matriz fundamental.

d) **Falso.** Las condiciones iniciales indican que la masa se libera 2 unidades desplazada respecto al punto de equilibrio pero con el resorte comprimido, en lugar de estirado. Lo demás es correcto.

Prof. Jorge Sánchez
jorgesanchez@usb.ve